**习题五**

【1】选择题

（1）设三阶矩阵的特征值是，矩阵，则

（A）； （B）； （C）； （D）.

（2）设是可逆矩阵的一个特征值，则矩阵有一个特征值等于

（A）； （B）； （C）； （D）.

（3）设矩阵



则的全部特征值为

（A）； （B）； （C）； （D）.

（4）设为三阶矩阵，且已知,则

（A）； （B）； （C）; （D）.

（5）设阶矩阵可逆，是的属于特征值的特征向量，则下列论述中不正确的是：

（A）是矩阵的属于特征值的特征向量.

（B）是矩阵的属于特征值的特征向量.

（C）是矩阵的属于特征值的特征向量.

（D）是矩阵的属于特征值的特征向量.

（6）设矩阵



矩阵，则

（A）7； （B）6； （C）5； （D）4.

【解答】（1）考虑到特征值性质，所以我们仅需要求出的所有特征值即可.设是的一个特征值，则有特征值为，则代入的特征值可以分别得到：



故.选D.

（2）类似于上一题，可以知道有一个特征值为，根据可逆矩阵特征值的性质，有.选B.

（3）从定义入手，去解方程，则我们有



容易计算得到.选A.

（4）注意到所给条件都是特征值形式，我们容易计算得到的三个特征值为，则.从而注意到的特征值为



从而的特征值为，则



选A.

（5）根据课本前面Page183的性质，容易知道ABC均是对的，所以此题选D.

（6）根据相似矩阵的性质，我们发现存在可逆矩阵使得



其中，我们有



故容易知道.选B.

从该题我们可以得到结论如下：若矩阵,则有.

【2】求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1） （2）

（3） （4）

【解答】（1）



则容易得到特征值为

故我们有，解得基础解系为，即所有特征向量为.

（2）



从而特征值为.

特征值为时，我们有

,化简系数矩阵有,解得基础解系为，即所有特征向量为.

特征值为时，我们有

,化简系数矩阵有,解得基础解系为，即所有特征向量为.

特征值为时，我们有

,化简系数矩阵有,解得基础解系为，即所有特征向量为.

（3）

，其中未考虑复数特征值的情况.则我们有

特征值为时，，化简系数矩阵有

，得到基础解系为,从而特征向量为.

特征值为时，，化简系数矩阵有

，得到基础解系为,从而特征向量为.

（4）



从而容易计算得到特征值为.下面来计算特征向量：

当特征值为时，，化简系数矩阵有

，可以得到基础解系为，即所有特征向量为.

当特征值为时，，化简系数矩阵有

，可以得到基础解系为，即所有特征向量为.

【3】设为阶矩阵，证明和的特征值相同.

【解答】根据定义，知的特征值为特征多项式的根，同样的特征值是特征多项式的根.我们根据行列式的性质，有



从而两者的根也相同，即和的特征值相同.

【4】设，证明的特征值只能取或.

【解答】对上述式子进行因式分解，有



对等式取行列式，有，故或者,从而特征值为或者.下面证明除了之外没有其他的特征值.



可以发现时，从而不是的特征值.

【5】设是阶矩阵的特征值，证明：也是阶矩阵的特征值.

【解答】是阶矩阵的特征值，则



在矩阵两边乘上我们有.

若，则由特征值定义知是的特征值.下面证明.事实上，由，则有.再根据知，因此.

【6】已知三阶矩阵的特征值为，求.

【解答】根据矩阵的特征值为，可以知道矩阵的特征值为



故.

【7】已知三阶矩阵的特征值为，求.

【解答】根据矩阵的特征值为，先计算，从而我们有的特征值为



则.

【8】设.

（1）证明：是的重特征值.

（2）求的非零特征值以及个线性无关的特征向量.

【解答】（1）注意到为对称阵，故可以与对角阵相似.我们有，则



而，则；又，则，综上容易知道.

相似对角化后秩不变，则有.于是只有一个非零对角元，即是的重特征值.

（2）其次我们来求的非零特征值.因为的对角元之和为，又由特征值性质：，从而由上知为唯一的非零特征值.

接下来求的特征向量.

（i）对应于，解方程，由



得到个线性无关的特征向量为



（ii）考虑的特征向量.因为，且是个数字，则我们有



根据定义，即知有非零特征值，对应特征向量为.

【9】设向量都是非零向量，且满足条件.记阶矩阵.求

（1）.

（2）矩阵的特征值和特征向量.

【解答】（1），说明正交.我们写出，有



（2）下面来求矩阵的特征值，设矩阵的特征值为，我们有的特征值为，设其对应的特征向量为，则我们有



根据的任意性可以知道矩阵的特征值全部为零.由于，则求特征向量即去解方程.考虑到是非零向量，不妨设.即去解



从而可以得到一组基础解系如下：



于是对应于特征值的全部特征向量为



其中且不全为零.

【10】若四阶矩阵与相似，矩阵的特征值为,求行列式.

【解答】矩阵相似，从而特征值相同，故的特征值为.故的特征值为.则的特征值为.故

【11】已知矩阵相似于对角矩阵.是的多项式，求.

【解答】此题直接求解比较困难，我们不妨通过特征值来求解.根据相似于对角方阵，则容易知道是矩阵的个特征值.

不妨设多项式为



则对于矩阵的某个特征值，有的特征值为



从而有.

【12】设分别是矩阵对应于特征值的特征向量，且，



为常数，且，证明不是的特征向量.

【解答】根据题设，我们有



则我们有，二者相加有



若为的特征向量，那我们一定有



其中为对应的特征值.从而我们得到



故有.而分别是矩阵对应于特征值的特征向量，且，则.又有，故若要等式成立必有



而这与题设矛盾！故不可能为的特征向量.

【13】设均为阶矩阵，且（相似于），则（）

（A）；

（B）和有相同的特征值和特征向量；

（C）和都相似于同一个对角矩阵；

（D）对任意常数，必有.

【解答】（A）但不意味着，故A错误.

（B）相似矩阵有相同特征值，但是特征向量不一定相同.

（C）一个阶矩阵能够相似对角化的前提条件是有个线性无关的特征向量，但题设无法得到这一点，即不一定能够相似对角化.

（D）正确，因为，我们可知存在可逆矩阵，使得，从而对于任意常数，我们有



即对于任意常数，有.故该题选D.

【14】设矩阵和相似，其中



求和的值.

【解答】容易知道矩阵的特征值为，故矩阵的特征值也为.我们有



容易发现，.

【15】设矩阵，则下列矩阵中，与相似的矩阵为（）

（A）； （B）；

（C）； （D）.

【解答】容易知道矩阵的特征值为，而是对角矩阵，故我们需要判断下列四个矩阵哪个可以相似对角化.故我们考虑特征值的几何重数和代数重数.显然代数重数为，若需要相似对角化，则需要几何重数也为.我们有





故发现只有（C）中矩阵的代数重数等于几何重数，故此题选C.(P193结论)

【16】设均为阶矩阵，且，判断下列结论是否正确.若正确，请说明理由，若错误，请给出反例.

（1）；

（2）有相同的特征值与特征向量；

（3）存在对角矩阵，使都相似于；

（4）；

（5）（为正整数）；

（6）若可逆，则可逆，且；

（7）.

【解答】，则存在可逆矩阵使得.

（1）正确.对于上式两边取转置，有



故我们证明了.

（2）错误，有相同的特征值，但是不一定有相同的特征向量.我们可以证明对于相同特征值，若矩阵的特征向量为，有是矩阵对应于的特征向量.因为我们有



显然不一定有，故该命题不正确.

（3）错误，矩阵不一定能够相似对角化.

（4）正确，对矩阵左乘可逆矩阵相当于进行初等行变换，对矩阵右乘可逆矩阵相当于进行初等列变换，而这些操作并不会改变矩阵的秩序，即



这从另一方面说明了相似变换是一种初等变换.

（5）正确，我们有



因此.

（6）正确，我们有，故



故矩阵可逆.从而在两边取逆，有



即.

（7）正确，我们有，故.

【17】若，则.

【解答】我们有





从而命题得证！

【18】证明：若可逆，则.

【解答】若可逆，我们有，发现存在可逆矩阵使得，故.

【19】若矩阵，证明：



【解答】P189有证明.因为，故存在可逆矩阵使得



令，则根据分块矩阵的乘法可以得到



即，从而



【20】设矩阵满足，证明：可逆.

【解答】





故矩阵可逆.

【21】若，则和至少有一个是的特征值.

【解答】我们有，故我们一定有

或者

从而和至少有一个是的特征值.

【22】设，是的四重特征值，是的单特征值，求的特征多项式.

【解答】显然的我们有特征多项式为.

【23】设为阶矩阵，若存在正整数，使得，则称为幂零矩阵.证明：幂零矩阵的特征值只能是.

【解答】设矩阵的任一特征值为，对应的特征向量为，即.于是我们有.由于，故，而特征向量，所以.从而我们有.由特征值的任意性可知，幂零矩阵的特征值全为零.

【24】设为阶矩阵，是的特征值，是对应的特征向量，证明：



是矩阵的特征值，是对应的特征向量.

【解答】我们根据题设有，则有



故可以得到





则原命题得证！

【25】设是阶对称矩阵对应于特征值的特征向量，为阶可逆矩阵，求矩阵对应于特征值的特征向量.

【解答】见【16】（2），根据，则我们有



故矩阵对应于特征值的特征向量为.

【26】设二阶实矩阵的行列式，证明：能相似于对角阵.

【解答】根据特征值的性质容易知道所有特征值的积等于.因为为二阶实矩阵，故只有两个实特征值.设这两个特征值为，则



从而异号，则.故能相似于对角阵.P192推论1.

【27】已知



求（为正整数）.

【解答】容易计算得到，且我们有



故



【28】求，其中

（1）； （2）；

【解答】（1）我们有



故周期为，我们有.

（2）我们有





故周期为，我们有.

注解：这两题题干比较奇怪，所给的矩阵都不能相似对角化，只能通过写出几项寻找规律了.

【29】设矩阵，求，其中为正整数.

【解答】首先求矩阵的特征值，我们有



求解得到特征值为.对应的特征向量分别为



故我们可以对此矩阵进行相似对角化，有.

故得到.故我们可以知道

故.

【30】若和都是对角矩阵，证明相似于的充分必要条件是与的主对角元除了排列次序外是完全相同的.

【解答】首先证明必要性.，故和有完全相同的特征值.而又因为和都是对角矩阵，则主对角元上元素是所有的特征值排列，故必然有与的主对角元除了排列次序外是完全相同的.否则若二者有不同的主对角元，就说明二者有不同的特征值，不可能满足.

接下来证明充分性.记，对角线上分别为它们的特征值.当时，我们取为第一种初等方阵（即由对换单位方阵的两行得到）之积，这样的也成为置换方阵，即可以得到，即.（实际上就是通过行变换与列变换使得两个矩阵相同）.

【31】已知矩阵与矩阵相似.

（1）求与；

（2）求可逆矩阵，使得.

【解答】（1）和【14】题相同，我们有.

（2）即进行相似对角化，我们只需要求出特征向量即可.有



从而得到可逆矩阵.

【32】设是三阶矩阵的特征值，对应的特征向量分别为



求，其中是正整数.

【解答】



可以求出，则



【33】设三阶矩阵的特征值为，对应的特征向量分别为



求矩阵.

【解答】显然我们有



故



【34】设矩阵，问取何值时，可相似于对角矩阵？求出它的相似对角矩阵.

【解答】容易发现这是一个下三角矩阵，故行列式为对角线乘积，容易知道特征值为.故其对应的几何重数也都必须是.我们有



只有当时才能满足，也即几何重数等于.我们又有



只有当时才能满足，也即几何重数等于.可以取任意实数.

综上所述，时，相似于对角矩阵.

【35】证明正交矩阵的实特征值的可能取值为或.

【解答】考虑正交矩阵，我们有.设关于特征值的特征向量为，则我们有；两边同时转置得到；两边同时乘以得到，故我们得到.因为，故，从而必定有.

【36】求正交矩阵，使为对角矩阵.

（一） （二）

解答：（一）先解出的特征值，有



则我们容易得到特征值为.

当特征值为时，做化简可以得到，可以得到基础解系为，也可以作为特征向量.

当特征值为时，做化简可以得到，可以得到基础解系为，也可以作为特征向量.

当特征值为时，做化简可以得到，可以得到基础解系为，也可以作为特征向量.

注意到这三个向量本就正交，所以只需要单位化即可.从而我们容易得到



则.

（二）先解出的特征值，有



则我们容易得到特征值为.

当特征值为时，做化简可以得到，可以得到基础解系为，也可以作为特征向量.

当特征值为时，做化简可以得到，可以得到基础解系为，也可以作为特征向量.

当特征值为时，做化简可以得到，可以得到基础解系为，也可以作为特征向量.

注意到这三个向量本就正交，所以只需要单位化即可.从而我们容易得到



则.

【37】设阶实对称矩阵的特征值为，且对应的特征值有特征向量



试求矩阵.

【解答】实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必定正交，故我们考虑求解方程，写出系数矩阵，有



得到对应于特征值的特征向量.故我们有



【38】设为实对称矩阵，若正交相似于，证明：为实对称矩阵.

【解答】根据已知，存在正交矩阵，使得.因为为对称矩阵，故



从而我们有，故矩阵也为对称矩阵.又因为为实矩阵，则其特征值都是实数，故特征向量也都为实向量，所以为实矩阵，故也为实矩阵，即为实对称矩阵.

【39】设为阶矩阵，且有个不相等的特征值，证明：和相似于同一个对角阵.

【解答】【18】中证明了若可逆，则，此处有个不相等的特征值，显然可逆，则我们可以知道，故和有相同的特征值，即也有个不相等的特征值.故和都可以相似对角化，且相似于同一个对角阵.（即主对角线上都是特征值的对角矩阵）.

【40】设是两个非零的正交向量，且



证明：

（1）；（2）；（3）；（4）的所有特征值都等于零.

【解答】（1）显然我们根据矩阵乘法的规则有



（2）我们有



注意到矩阵每一项的求和形式都是，而我们根据题设可以知道，故中每一项均为零，即.

（3）考虑矩阵的秩，观察



注意到，若存在，则有



故此时.而若不存在，则有，无论哪种情况，都有



即.

（4）若矩阵的特征值为，我们有矩阵的特征值为.但，故矩阵的特征值均为零.

【41】已知是三个非零的三阶矩阵，且



证明：（1）属于的特征向量是属于的特征向量；

（2）若分别是属于特征值的特征向量，则线性无关.

【解答】（1）根据题意，我们有，而我们又有，故



故属于的特征向量.

（2）根据题意我们有，考虑下式



即，两边同时乘以，有



而，故得到了.此时我们有



因为，则一定有，同理可以得到，即我们证明了线性无关.

【42】设是个实数，矩阵



（一）若是的特征值，证明：是对应于的特征向量.

（二）若的特征值两两互异，求可逆矩阵，使得为对角矩阵.

【解答】（1）直接根据定义来，根据特征值定义，有.即证明



即可.而显然的，我们有



其中，

我们来计算带进特征值的行列式，即计算，考虑拉普拉斯展开，有



即，从而我们证明了是对应于的特征向量.

（2）我们接下来寻找可逆矩阵.根据上一题，我们已经得到对于任意一个特征值，都有特征向量为.而根据特征值两两相异，我们知道该矩阵必定存在个特征值，同时对应着个特征向量.则我们可以构造如下的矩阵来进行相似对角化：



从而得到



【43】设和都是阶实对称矩阵，且有正交阵，使得和都是对角矩阵，证明：也是实对称矩阵.

【解答】设以及，则（对角阵的性质），故我们有，从而有





从而我们得到，即也是实对称矩阵.

【44】证明：矩阵只与自身相似的充分必要条件是是数量矩阵.

【解答】充分性.显然矩阵与自身相似.接下来证明矩阵是数量矩阵的情况下只能与自身相似.不妨设.若存在矩阵使得，则必定有可逆矩阵满足



即，这与假设矛盾！故矩阵只与自身相似.

必要性.矩阵只与自身相似，相当于对于任意的可逆矩阵，都有



即.我们取一些特殊的矩阵来探究的性质.令，其中是只有一个元素为而其他元素均为零的矩阵，显然可逆（是三角矩阵）.则



故有.设中为的元素为.则



则为了二者相等，必须有.我们只需要依次把全部取一遍，即可知道.从而必要性得证！

【45】设阶矩阵满足，证明：必能相似于对角矩阵.写出的相似对角矩阵的形式.

【解答】根据第三章习题【45】可以知道.根据基础解系的知识，我们可以知道方程的基础解系包含个特征向量；方程的基础解系包含了个特征向量.而不同特征值的特征向量线性无关，故线性无关的特征向量一共有



从而必定可以对角化.容易知道的特征值为.对角矩阵的形式为



其中是阶的单位矩阵，为阶的单位矩阵.

【46】设阶矩阵满足，证明：必能相似于对角矩阵.写出的相似对角矩阵的形式.

【解答】方法同【45】题，容易验证有个线性无关的特征向量.考虑特征值，有



故的相似对角矩阵为



其中是阶的单位矩阵，为阶的单位矩阵.

【47】证明：若为正交矩阵，则的特征值的模为.

【解答】正交矩阵满足，若的特征值为，特征向量为，则



故矩阵的特征值为.然而和的特征值相同，故，即我们有的特征值的模为.

注意，上面的证明中必须有，下面证明是不可能的.若，则



这是矛盾的！故.

【48】若矩阵和矩阵是同阶的正交矩阵，则是否为正交矩阵？若是，证明你的结论；若不是，举出一个反例.

【解答】显然不是.取即可.

【49】设是四维线性空间的一组基，上的线性变换在这组基下的矩阵为



（一）求在基



下的矩阵；

（二）求的全部特征值和特征向量；

（三）求的一组基，使在这组基下的矩阵是对角阵.

【解答】（1）我们有如下结论：

设线性空间中有两个基：，由基到基的过渡矩阵为,中的线性变换在这两个基下的矩阵分别为，则我们有.

则我们先来求过渡矩阵：根据关系式容易得到过渡矩阵如下：

，

从而有

（2）即计算的所有特征值.考虑到上述变换过程是一个相似变换，故特征值不变，我们即可以求的特征值以此来减少计算量.即计算.根据拉普拉斯展开，我们有



从而我们得到四个特征值分别为.

相似变换特征向量也不变，故直接求特征向量即可.对于，有

，从而可以得到基础解系如下：.

即可以写成如下特征向量：，不同时为零.

对于，有

，从而可以得到基础解系如下.

即可以写成如下特征向量：.

对于，有

,可以得到基础解系如下.

即可以写成如下特征向量：.

（3）显然的根据上面计算得到的特征向量，可以构造这样一组基，为



此时该组基下的矩阵为对角矩阵：

